

## Značení

$\mathcal{N}$  množina všech přirozených čísel (tj. všech kladných celých čísel),

$\mathcal{Z}$  množina všech celých čísel,

$\mathcal{N}_0$  množina všech nezáporných celých čísel,

$\mathcal{R}$  množina všech reálných čísel,

$\mathcal{D}(f)$  definiční obor funkce  $f$ ,

$\mathcal{H}(f)$  obor hodnot funkce  $f$ ,

## Množinové operace

sjednocení množin  $A$  a  $B$ :  $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$ , průnik množin  $A$  a  $B$ :  $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$ ,  
 rozdíl množin  $A$  a  $B$ :  $A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$ , kartézský součin množin  $A$  a  $B$ :  $A \times B = \{[x, y]; x \in A \wedge y \in B\}$ .

## Mocniny

Pro libovolná reálná čísla  $a$  a  $b$  platí:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ,  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ,  
 $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ .

Pro  $a \geq 0$ ,  $n \in \mathcal{N}$  a  $m \in \mathcal{N}$  platí:  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ . Pro  $a \neq 0$  a  $m \in \mathcal{N}$  platí:  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ .

Pro  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $x \in \mathcal{R}$  a  $y \in \mathcal{R}$  platí:  $a^x > 0$ ,  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ,  $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ,  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,  $(ab)^x = a^x b^x$ ,  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ .

Pro každé reálné číslo  $a$  platí:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

## Kvadratická rovnice

Řešení rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , kde  $a$  je nenulové reálné číslo,  $b$  a  $c$  jsou libovolná reálná čísla, jsou

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, & \text{jestliže diskriminant } D = b^2 - 4ac > 0, \\ \frac{-b}{2a}, & \text{jestliže diskriminant } D = b^2 - 4ac = 0, \\ \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}, & \text{jestliže diskriminant } D = b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

## Goniometrické funkce

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	+	-	-
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-	-	+

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	-
$\operatorname{cotg} x$	*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Symbol \* označuje, že funkce není definována v příslušném bodě.

Pro libovolná reálná čísla  $x$ ,  $y$  a pro libovolné celé číslo  $k$  platí:

$$\begin{aligned} \sin(x + 2k\pi) &= \sin x, & \sin(-x) &= -\sin x, & \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x + 2k\pi) &= \cos x, & \cos(-x) &= \cos x, & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \end{aligned}$$

Pro libovolné reálné číslo  $x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$ , kde  $l \in \mathcal{Z}$ , a pro libovolné celé číslo  $k$  platí:

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Pro libovolné reálné číslo  $x \neq l\pi$ , kde  $l \in \mathcal{Z}$ , a pro libovolné celé číslo  $k$  platí:

$$\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

Pro libovolné reálné číslo  $x \neq k\frac{\pi}{2}$ , kde  $k \in \mathcal{Z}$ , platí:  $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ ,  $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ .

## Exponenciální a logaritmické funkce

Nechť  $a$  je reálné číslo takové, že  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ .

Pro funkce  $f(x) = a^x$  a  $g(x) = \log_a x$  platí:  $\mathcal{D}(f) = \mathcal{H}(g) = (-\infty, \infty)$ ,  $\mathcal{D}(g) = \mathcal{H}(f) = (0, \infty)$ ,

pro  $a \in (0, 1)$  je funkce  $f$  (resp.  $g$ ) klesající v intervalu  $(-\infty, \infty)$  (resp.  $(0, \infty)$ ),

pro  $a > 1$  je funkce  $f$  (resp.  $g$ ) rostoucí v intervalu  $(-\infty, \infty)$  (resp.  $(0, \infty)$ ).

Pro  $x \in \mathcal{R}$  a  $y > 0$  platí:  $y = a^x \iff x = \log_a y$ .

Pro libovolná kladná reálná čísla  $x$ ,  $y$  a pro libovolné reálné číslo  $z$  platí:

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy), \quad \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right), \quad z \log_a x = \log_a x^z, \quad a^{\log_a x} = x \quad \text{a} \quad \log_a a^z = z.$$

## Posloupnosti

Posloupnost  $a_1, a_2, a_3, \dots$  (dále budeme značit  $(a_n)$ ) se nazývá *aritmetická* (resp. *geometrická*), jestliže existuje reálné číslo  $d$  (resp.  $q$ ) takové, že pro všechna  $n \in \mathcal{N}$  platí  $a_{n+1} = a_n + d$  (resp.  $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ). Reálné číslo  $d$  (resp.  $q$ ) se nazývá *diference* (resp. *kvocient*) aritmetické (resp. geometrické) posloupnosti  $(a_n)$ .

Pro libovolné  $n \in \mathcal{N}$  v aritmetické posloupnosti  $(a_n)$  s diferencí  $d$  platí:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{a} \quad \text{součet prvních } n \text{ členů posloupnosti je } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Pro libovolné  $n \in \mathcal{N}$  v geometrické posloupnosti  $(a_n)$  s kvocientem  $q$  platí:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{a} \quad \text{součet prvních } n \text{ členů posloupnosti je } s_n = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{jestliže } q \neq 1, \\ n a_1, & \text{jestliže } q = 1. \end{cases}$$

## Komplexní čísla

Jsou-li  $a$  a  $b$  libovolná reálná čísla, *komplexní číslo*  $z$  je v *algebraickém tvaru*, jestliže  $z = a + ib$ , kde reálné číslo  $a$  (resp.  $b$ ) je reálná (resp. imaginární) část komplexního čísla  $z$  a  $i$  je imaginární jednotka.

Pro libovolné  $n \in \mathcal{N}_0$  platí:  $i^{4n+1} = i^1 = i$ ,  $i^{4n+2} = i^2 = -1$ ,  $i^{4n+3} = i^3 = -i$ ,  $i^{4n+4} = i^4 = 1$ .

Pro libovolná komplexní čísla  $z = a + ib$  a  $u = c + id$ , kde  $a, b, c$  a  $d$  jsou reálná čísla, platí:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad z \pm u = (a \pm c) + i(b \pm d), \quad z \cdot u = (ac - bd) + i(ad + bc), \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Je-li  $z = a + ib$  ( $a \in \mathcal{R}$  a  $b \in \mathcal{R}$ ) nenulové komplexní číslo, potom goniometrický tvar komplexního čísla  $z$  je:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \text{kde } \cos \alpha = \frac{a}{|z|} \text{ a } \sin \alpha = \frac{b}{|z|}.$$

Moivreova věta: Pro nenulové komplexní číslo  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  a  $n \in \mathcal{N}$  platí:  $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$ .

## Kombinatorika

Je-li  $n \in \mathcal{N}_0$ , potom  $n!$  definujeme:

(a)  $0! = 1$ ,

(b) pro  $n \in \mathcal{N}$  je  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$ ,

tj.  $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \dots$

Jsou-li  $n$  a  $k$  čísla z  $\mathcal{N}_0$  taková, že  $n \geq k$ , potom  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Nechť množina  $M$  obsahuje právě  $n$  různých prvků.

(a) Potom počet permutací bez opakování vytvořených z prvků množiny  $M$  je  $n!$ .

(b) Je-li  $k \in \mathcal{N}$  takové, že  $k \leq n$ , potom počet variací  $k$ -té třídy vytvořených z prvků množiny  $M$  bez opakování je  $\frac{n!}{(n-k)!}$ .

(c) Je-li  $k \in \mathcal{N}$  takové, že  $k \leq n$ , potom počet kombinací  $k$ -té třídy vytvořených z prvků množiny  $M$  bez opakování je  $\binom{n}{k}$ .

Binomická věta:  $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ,

kde  $a \in \mathcal{C}, b \in \mathcal{C}$  a  $n \in \mathcal{N}$ .

## Analytická geometrie v rovině

Nenulové *vektory*  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  z  $V_2$  jsou:

(a) *kolmé*, jestliže  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$ ,

(b) *rovnoběžné*, jestliže existuje  $k \in \mathcal{R}$  takové, že  $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$ , tj.  $u_1 = k v_1$  a  $u_2 = k v_2$ .

*Vzdálenost bodů*  $A = [a_1, a_2]$  a  $B = [b_1, b_2]$  je reálné číslo  $d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ .

*Parametrická rovnice přímky* má tvar  $\begin{cases} x = a_1 + t u_1, \\ y = a_2 + t u_2, \end{cases}$  kde  $t \in \mathcal{R}$ , nenulový vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  je směrový vektor přímky a

$A = [a_1, a_2]$  je bod přímky.

*Obecná rovnice přímky* má tvar  $ax + by + c = 0$ , kde nenulový vektor  $(a, b)$  je vektor normály přímky.

*Rovnice kružnice* o středu  $S = [s_1, s_2]$  a poloměru  $r$  má tvar  $(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 = r^2$ .

*Rovnice elipsy* o středu  $S = [s_1, s_2]$  má tvar  $\frac{(x-s_1)^2}{a^2} + \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = 1$  s poloosou délky  $a > 0$  rovnoběžnou s osou  $x$  a poloosou délky  $b > 0$  rovnoběžnou s osou  $y$ .

*Rovnice hyperboly* o středu  $S = [s_1, s_2]$  má tvar  $\frac{(x-s_1)^2}{a^2} - \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = 1$  s hlavní poloosou délky  $a > 0$  rovnoběžnou s osou  $x$  a vedlejší poloosou délky  $b > 0$  rovnoběžnou s osou  $y$ .

*Rovnice hyperboly* o středu  $S = [s_1, s_2]$  má tvar  $\frac{(x-s_1)^2}{a^2} - \frac{(y-s_2)^2}{b^2} = -1$  s hlavní poloosou délky  $b > 0$  rovnoběžnou s osou  $y$  a vedlejší poloosou délky  $a > 0$  rovnoběžnou s osou  $x$ .

*Rovnice paraboly* o vrcholu  $V = [v_1, v_2]$  s osou rovnoběžnou s osou  $x$  má tvar  $(y - v_2)^2 = 2p(x - v_1)$ .

*Rovnice paraboly* o vrcholu  $V = [v_1, v_2]$  s osou rovnoběžnou s osou  $y$  má tvar  $(x - v_1)^2 = 2p(y - v_2)$ .

**Tabulka druhých a třetích mocnin přirozených čísel**

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$n^2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
$n^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859
$\sqrt{n}$	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16	3,32	3,46	3,61	3,74	3,87	4	4,12	4,24	4,36

Desetinná čísla u druhých odmocnin jsou přibližné hodnoty.